Písemka z Prosemináře z teorie čísel, 27. března 2007

1. příklad (5 bodů)
Najdi celá čísla a, b taková, že $(161, 378) = 161a + 378b$.

2. příklad (5 bodů)
Najdi celé číslo $a \in \{0, 1, 2, \ldots, 34\}$ takové, že $9^{50} \equiv a \pmod{35}$.

3. příklad (10 bodů)
a) Definuj algebraické číslo.
b) Dokaž, že $\sqrt{2} + \sqrt{7}$ je algebraické číslo.
c) Dokaž, že $\sqrt{2} + \sqrt{7}$ není racionální číslo.

4. příklad (5 bodů)
Dokaž, že pro každé přirozené číslo n platí $(n+1)^n \equiv 1 \pmod{n^2}$.

5. příklad (5 bodů)
Spočti hodnotu Eulerovy funkce $\varphi(126)$.

6. příklad (5 bodů)
Vyřeš soustavu kongruencí $3x \equiv 1 \pmod{5}$, $3x \equiv 2 \pmod{11}$, kde $x \in \mathbb{Z}$.

7. příklad (5 bodů)
Najdi všechna prvočísla p taková, že i čísla $p + 10$ a $p + 14$ jsou prvočísla.

8. příklad (5 bodů)
Dokaž, že $17 | 2a + 3b$ právě když $17 | 9a + 5b$ (a, b jsou celá čísla).

9. příklad (10 bodů)
Dokaž, že pro libovolné přirozené číslo n platí buď $\varphi(5n) = 5\varphi(n)$ nebo $\varphi(5n) = 4\varphi(n)$. Kdy nastává který případ?

K získání zápočtu je potřeba aspoň 30 bodů. Přeji hodně zábavy při řešení (: